سامانه بانک تستی

FlowRax

ریاضی

Math

۱

چون نقطه $A(۲,۱)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع f است، اولاً باید $f(۲)=۱$، ثانیاً باید $f'(۲)=۰$ باشد، بنابراین داریم:

$$f(x)=x^{۳}+bx^{۲}+d \Rightarrow f(۲)=۱ \Rightarrow ۸+۴b+d=۱ \Rightarrow ۴b+d=-۷ \quad (۱)$$

$$f'(x)=۳x^{۲}+۲bx \Rightarrow f'(۲)=۰ \Rightarrow ۱۲+۴b=۰ \Rightarrow b=-۳$$

$$\xrightarrow{(۱)} -۱۲+d=-۷ \Rightarrow d=۵ \Rightarrow ۲b+d=-۶+۵=-۱$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲

برای این که وضعیت یکنوایی تابع را در دامنه‌اش بررسی کنیم باید مشتق تابع را تعیین علامت کنیم:

$$f(x)=x^{۳}-۱۲x+۴ \Rightarrow f'(x)=۳x^{۲}-۱۲=۰ \Rightarrow x^{۲}=۴ \Rightarrow x=\pm ۲$$

x	$-\infty$		-۲		۲		$+\infty$
y'		+	۰	−	۰	+	
y		↗		↘		↗	

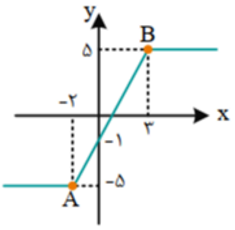
تابع f در بازهٔ $(-۲,۲)$ نزولی اکید است که طول این بازه برابر ۴ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳

نمودار تابع را ببینید:

$$x=-۲ \Rightarrow y=-۵ \Rightarrow A(-۲,-۵)$$
$$x=۳ \Rightarrow y=۵ \Rightarrow B(۳,۵)$$



تمام بخش‌های ثابت، هم min و هم max هستند و نقطه A نیز min نسبی است.
پس مجموعه طول‌های نقاط min نسبی تابع $(-\infty,-۲]\cup(۳,+\infty)$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۴

مشتق تابع را محاسبه کرده، نقاط بحرانی را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=x^{۳}-۴x^{۲}+۴$$

$$f'(x)=۳x^{۲}-۸x=۰ \Rightarrow x(۳x-۸)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ & \text{غ ق ق} \\ x=\frac{۸}{۳} & \checkmark \text{ در دامنه هست} \end{cases}$$

تنها نقطهٔ بحرانی $x=\frac{۸}{۳}$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۵

چون تابع f در تمام دامنه‌اش هم صعودی و هم نزولی است، پس تابع f تابعی ثابت است، یعنی $f'(x)=۰$ است.

$$f(x)=\frac{۴x-a}{x-۳} \Rightarrow f'(x)=\frac{۴(x-۳)-۱(۴x-a)}{(x-۳)^{۲}}=۰$$

$$\Rightarrow \frac{-۱۲+a}{(x-۳)^{۲}}=۰ \Rightarrow -۱۲+a=۰ \Rightarrow a=۱۲$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۴x-۱۲}{x-۳}=\frac{۴(x-۳)}{x-۳} \Rightarrow f(x)=۴ \ , \ D_f=\mathbb{R}-\{۳\}$$

$$\Rightarrow f(۵)+f'(۵)=۴+۰=۴$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۶ توجه کنید که:

$$f(x)=(x-5)\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow f'(x)=\sqrt[3]{x^2}+\frac{2(x-5)}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$f'(x)=\frac{3x+2x-10}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{5x-10}{3\sqrt[3]{x}}$$

بنابراین جدول تعیین علامت $f'(x)$ به صورت مقابل است:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	

و نقاط $O(0,0)$ و $A(2,-3\sqrt[3]{4})$ نقاط اکسترمم نسبی تابع هستند که فاصلهٔ آن‌ها برابر است با:

$$OA=\sqrt{(2-0)^2+(-3\sqrt[3]{4}-0)^2}=\sqrt{4+9\sqrt[3]{16}}=\sqrt{4+18\sqrt[3]{2}}$$

بنابراین:

$$OA^2=4+18\sqrt[3]{2}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۷ مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^2+3x}{x-1} \Rightarrow f'(x)=\frac{(2x+3)(x-1)-(x^2+3x)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow f(-1)=\frac{-2}{-2}=1$$

x		-1		1		3	
y'	$+$	0	$-$	ت‌ن	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		max					

نقطهٔ $A(-1,1)$ ماکزیمم نسبی تابع f است. $-1+1=0$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۸ **نکته: نقطه‌ای به‌طول c از دامنهٔ تابع f را یک نقطهٔ بحرانی برای این تابع می‌نامیم هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد.**

مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=x^4-x^3-\frac{1}{2}x^2+1 \Rightarrow f'(x)=4x^3-3x^2-x$$

$f(x)$ یک تابع چندجمله‌ای است و در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است. پس با حل معادلهٔ $f'(x)=0$ طول نقاط بحرانی را به‌دست می‌آوریم:

$$4x^3-3x^2-x=0 \Rightarrow x(4x^2-3x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 4x^2-3x-1=0 \Rightarrow x=1\ ,\ x=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

پس $x=1$ و $x=-\frac{1}{4}$، به‌ترتیب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین طول نقاط بحرانی تابع هستند و اختلاف آن‌ها برابر با $\frac{5}{4}$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۹ **نکته: اگر تابع f در نقطه‌ای به‌طول c ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c)=0$. به عبارت دیگر، هر نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع، یک نقطهٔ بحرانی آن است.**

تابع f یک چندجمله‌ای است و در تمام نقاط مشتق‌پذیر است. چون $x=2$ طول اکسترمم نسبی تابع است، پس $f'(2)=0$ است. بنابراین:

$$f(x)=x^3-2x^2+ax+b \Rightarrow f'(x)=3x^2-4x+a \xrightarrow{f'(2)=0} 12-8+a=0 \Rightarrow a=-4$$

از طرفی مختصات اکسترمم نسبی تابع در آن صدق می‌کند و داریم:

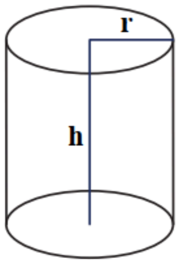
$$a=-4 \Rightarrow f(x)=x^3-2x^2-4x+b \xrightarrow{f(2)=-1} 8-8-8+b=0 \Rightarrow b=8$$

پس $a\cdot b=-4\times 8=-32$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۰ نکته (تعریف): با فرض $c \in D_f$، نقطهٔ $(c,f(c))$، یک نقطهٔ ماکزیمم مطلق برای تابع f نامیده می‌شود، هرگاه بـه‌ازای هـر x از D_f داشـته باشیم $f(c) \ge f(x)$. در این حالت عدد $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق f روی D_f می‌نامیم.

با توجه به فرض سؤال، داریم:



$$r+h=۱۲ \Rightarrow h=۱۲-r \quad (۱)$$

اگر V حجم این استوانه باشد، داریم:

$$V=\pi r^۲ h \xrightarrow{(۱)} V=\pi r^۲(۱۲-r) \Rightarrow V=\pi(۱۲r^۲-r^۳)$$

اکنون نقاط بحرانی و ماکزیمم مطلق V را به‌دست می‌آوریم:

$$V'=\pi(۲۴r-۳r^۲)=۰ \Rightarrow ۲۴r-۳r^۲=۰ \Rightarrow ۳r(۸-r)=۰ \Rightarrow \begin{cases} r=۰ & \times \quad (r>۰) \\ r=۸ & \checkmark \end{cases}$$

پس بیشترین حجم استوانه در حالتی که $r=۸$ باشد، اتفاق می‌افتد. بنابراین:

$$r=۸ \xrightarrow{(۱)} h=۴ \Rightarrow V=\pi(۸)^۲(۴)=۲۵۶\pi$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۱ نکته: تابع مشتق‌پذیر $f(x)$ در یک بازه اکیداً نزولی است، هرگاه در این بازه $f'(x)<۰$ باشد.

ابتدا مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$y'=۳x^۲-۴x-۴$$

هرجا مشتق تابع کوچکتر از صفر باشد، تابع در آن بازه اکیداً نزولی است:

$$y'<۰ \Rightarrow ۳x^۲-۴x-۴<۰ \Rightarrow (۳x+۲)(x-۲)<۰ \Rightarrow$$

x	$-\infty$		$-\frac{۲}{۳}$		۲		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

پس تابع در بازهٔ $(-\frac{۲}{۳},۲)$ اکیداً نزولی است، بنابراین بیشترین مقدار $b-a$ برابر است با: $b-a=۲-(-\frac{۲}{۳})=\frac{۸}{۳}$.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۲ نکته: برای یافتن اکسترمم‌های مطلق تابع پیوستهٔ f روی بازهٔ $[a,b]$، ابتدا نقاط بحرانی تابع را در این بازه پیدا کرده و مقدار تـابع را در آن نقاط محاسبه می‌کنیم. بزرگ‌ترین عدد، ماکزیمم مطلق و کوچک‌ترین عدد، مینیمم مطلق است.

ابتدا مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x)=۰ \Rightarrow ۳x^۲-۴x-۴=۰ \Rightarrow x=\frac{۴\pm\sqrt{۱۶+۴\times۳\times۴}}{۲\times۳}=\frac{۴\pm\sqrt{۶۴}}{۶} \Rightarrow x=\frac{۴\pm۸}{۶} \Rightarrow x=۲ \text{ یا } x=-\frac{۲}{۳}$$

تنها $x=۲$ در بازهٔ $[۰,۳]$ قرار دارد، پس باید مقادیر $f(۲)$، $f(۰)$ و $f(۳)$ را محاسبه کنیم:

$f(۰)=۰-۰-۰+۱=۱$ max مطلق

$f(۲)=۸-۸-۸+۱=-۷$ min مطلق

$f(۳)=۲۷-۱۸-۱۲+۱=-۲$

بنابراین مجموع مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق برابر با $-۷+۱=-۶$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۳

نکته: آزمون یکنوایی تابع:

الف) در یک بازه از دامنهٔ f اگر مقدار f' موجود و مثبت باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً صعودی است.

ب) در یک بازه از دامنهٔ f اگر مقدار f' موجود و منفی باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً نزولی است.

پ) در یک بازه از دامنهٔ f اگر مقدار f' موجود و برابر صفر باشد، آنگاه f در آن بازه تابعی ثابت است.

ابتدا مشتق تابع f با دامنهٔ $D_f=[0,+\infty)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+a)\ \Rightarrow\ f'(x)=\frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x})+x+a}{2\sqrt{x}}=\frac{3x+a}{2\sqrt{x}}$$

مخرج f' همواره مثبت است. پس برای اینکه تابع f در بازهٔ $[1,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد، باید صورت کسر نامنفی باشد؛ بنابراین:

$$3x+a\geq 0\ \Rightarrow\ x\geq -\frac{a}{3}\ \xrightarrow{x\geq 1}\ -\frac{a}{3}=1\ \Rightarrow\ a=-3$$

بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۴

نکته: اگر تابع f در نقطه‌ای به‌طول c ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c)=0$.

تابع f در $x=1$ مشتق‌پذیر است و $x=1$ طول اکسترمم نسبی آن است، پس $f'(1)=0$؛ بنابراین داریم:

$$f(x)=2x+\frac{a}{x+2}\ \Rightarrow\ f'(x)=2+\frac{-a}{(x+2)^2}\ \xrightarrow{x=1}\ f'(1)=2-\frac{a}{9}=0\ \Rightarrow\ a=18$$

از طرفی $f(1)=b$ بنابراین داریم:

$$a=18\ \Rightarrow\ f(x)=2x+\frac{18}{x+2}\ \xrightarrow{x=1}\ 2+\frac{18}{3}=b\ \Rightarrow\ b=8$$

بنابراین: $\frac{a}{b}=\frac{18}{8}=2/25$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۵

پلهٔ اول: با استفاده از مشتق، مینیمم نسبی تابع $f(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

$$f'(x)=3x^2-9=0\rightarrow x^2=3\rightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

x		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	+		−		+
	↗	max نسبی	↘	min نسبی	↗

$$x=\sqrt{3}\rightarrow f(\sqrt{3})=(\sqrt{3})^3-9\sqrt{3}+a=2a$$

$$\rightarrow a=-6\sqrt{3}\rightarrow f(x)=x^3-9x-6\sqrt{3}$$

پلهٔ دوم: مقدار $f(2\sqrt{3})$ را به‌دست می‌آوریم.

$$f(2\sqrt{3})=(2\sqrt{3})^3-9(2\sqrt{3})-6\sqrt{3}=24\sqrt{3}-18\sqrt{3}-6\sqrt{3}=0$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۶ **همهٔ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:**

الف جدول تعیین علامت تابع f' در اطراف $x=-۷$ به صورت مقابل است:

x		−۷	
f′	−		+

$\Rightarrow$ $x=-۷$ طول نقطهٔ مینیمم نسبی است.

ب چون در بازهٔ $(-۷,۵)$ نمودار f' بالای محور xها است، پس تابع f در این بازه اکیداً صعودی است، بنابراین $f(-۶)<f(۰)$ است.

پ چون $f'(-۷)=f'(۵)=f'(۱۷)=۰$ است، پس خط مماس بر نمودار تابع f در این ۳ نقطه موازی محور x است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۷

$$f'(x)=۶x^۲-۲۴x=۰\Rightarrow ۶x(x-۴)=۰\Rightarrow x=۰\,,۴$$

۳	۴	۵
M−۵۴	M−۶۴	M−۵۰

$$\Rightarrow \begin{matrix} \max=m-۵۰ \\ \min=m-۶۴ \end{matrix} \Rightarrow m-۵۰+m-۶۴=۰\Rightarrow ۲m-۱۱۴=۰\Rightarrow m=۵۷$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۸ **گام اول:** می‌خواهیم با استفاده از مشتق، یکنوایی تابع را بررسی کنیم، پس از تابع مشتق می‌گیریم.

$$f(x)=۳x^۴-x^۳$$
$$f'(x)=۱۲x^۳-۳x^۲$$

گام دوم: تابع f در $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق‌پذیر است، پس در هر بازه‌ای که $f'\geq ۰$ باشد، تابع صعودی است.

کافی است f' را تعیین علامت کنیم.

$$f'(x)=۳x^۲(۴x-۱)\ \Rightarrow\ \text{ریشه‌ها:}\begin{cases} x=۰ \\ x=\frac{۱}{۴} \end{cases}$$

x		۰		$\frac{۱}{۴}$	
f′(x)	−		−		+

پس تابع در بازهٔ $(\frac{۱}{۴},+\infty)$ صعودی است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۹ **گام اول**: ابتدا نقاط بحرانی تابع در بازهٔ $[-۱,۱]$ را به دست می‌آوریم. از تابع مشتق می‌گیریم و مشتق را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$f(x)=x^۳+۳x^۲+۱$$

$$f'(x)=۳x^۲+۶x$$

$$\text{نقاط بحرانی}: f'(x)=۰ \Rightarrow ۳x^۲+۶x=۰ \Rightarrow ۳x(x+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=-۲ \end{cases}$$

تنها $x=۰$ در بازهٔ $[-۱,۱]$ است. از طرفی نقاط ابتدا و انتهای بازه هم بحرانی هستند، پس سه نقطهٔ بحرانی $\{-۱,۰,۱\}$ داریم.

گام دوم: مقدار تابع را در نقاط بحرانی به دست می‌آوریم تا مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع به دست آیند.

$$f(-۱)=۱(-۱)^۳+۳(-۱)^۲+۱=۳$$

$$f(۰)=۱$$

$$f(۱)=۱^۳+۳\times۱^۲+۱=۵$$

پس در بازهٔ $[-۱,۱]$، ماکزیمم تابع f برابر با ۵ و مینیمم آن برابر با یک است که مجموع آن‌ها ۶ می‌شود.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۰ پاسخ تشریحی **گام اول**: دامنهٔ تابع $\mathbb{R}$ است و دامنهٔ تابع نقطهٔ ابتدا یا انتها ندارد که بحرانی باشند.

گام دوم: از تابع مشتق می‌گیریم.

$$f(x)=\frac{۱}{۲}\sqrt{x^۲+۹}-\frac{۱}{۴}x$$

$$f'(x)=\frac{۱}{۴}\times۲x\times\frac{۱}{\sqrt{x^۲+۹}}-\frac{۱}{۴}=\frac{۲x-\sqrt{x^۲+۹}}{۴\sqrt{x^۲+۹}}$$

گام سوم: مشتق را برابر با صفر قرار می‌دهیم تا طول نقطه(های) بحرانی به دست آید.

$$f'(x)=۰\Rightarrow ۲x-\sqrt{x^۲+۹}=۰\Rightarrow \sqrt{x^۲+۹}=۲x \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^۲+۹=۴x^۲$$

$$\Rightarrow ۳x^۲=۹\Rightarrow x^۲=۳\Rightarrow x=\pm\sqrt{۳} \xrightarrow{x>۰} x=\sqrt{۳}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۱ پاسخ تشریحی

گام اول: از تابع مشتق می‌گیریم و مشتق را برابر با صفر قرار می‌دهیم.

$$g(x)=x^۳+۲x-۵$$

$$g'(x)=۳x^۲+۲ \xrightarrow{g'(x)=۰} ۳x^۲+۲=۰\Rightarrow x^۲=-\frac{۲}{۳}\Rightarrow \text{جواب ندارد.}$$

گام دوم: تابع مشتق، صفر ندارد و همواره مثبت است، پس تابع f اکیداً صعودی است؛ در نتیجه در بازهٔ $[-۲,۱]$ داریم:

$$S=f_{max}=f(۱)=۱^۳+۲(۱)-۵=-۲$$

$$L=f_{min}=f(-۲)=(-۲)^۳+۲(-۲)-۵=-۱۷$$

گام سوم: خواستهٔ سؤال $S-L=-۲+۱۷=۱۵$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۲ پاسخ تشریحی **گام اول:** برای تعیین بازه‌های یکنوایی از تابع f مشتق می‌گیریم و مشتق را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{x-a}{x^{۲}+۳a^{۲}}\ ,\ ۰<a$$

$$f'(x)=\frac{(x-a)'(x^{۲}+۳a^{۲})-(x^{۲}+۳a^{۲})'(x-a)}{(x^{۲}+۳a^{۲})^{۲}}\Rightarrow f'(x)=\frac{\overbrace{۱(x^{۲}+۳a^{۲})-۲x(x-a)}^{-x^{۲}+۲ax+۳a^{۲}}}{(x^{۲}+۳a^{۲})^{۲}}$$

$$\xrightarrow{f'(x)=۰} x^{۲}-۲ax-۳a^{۲}=۰\Rightarrow (x+a)(x-۳a)=۰\Rightarrow \begin{cases}x=-a\\ x=۳a\end{cases}$$

جدول تعیین علامت f' را رسم می‌کنیم:

x		$-a$		$۳a$	
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$
f	↘	min	↗	max	↘

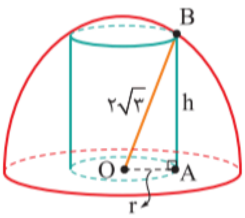
گام دوم: مطابق جدول تعیین علامت f'، تابع f در بازهٔ $[-a,۳a]$ اکیداً صعودی است؛ پس طبق صورت سؤال، طول این بازه برابر با ۴ است.

$$۳a-(-a)=۴\Rightarrow ۴a=۴\Rightarrow a=۱$$

گام سوم: طبق جدول تعیین علامت f'، مشتق تابع در $x=۳a=۳$ از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد؛ پس این نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۳ پاسخ تشریحی **گام اول:** شکل سؤال را رسم می‌کنیم و متغیرها را روی آن نام‌گذاری می‌کنیم.



گام دوم: رابطهٔ اصلی در این سؤال، معادلهٔ حجم استوانه است.

$$V_{\text{استوانه}}=\pi r^{۲}h\quad (۱)$$:رابطهٔ اصلی

گام سوم: رابطهٔ کمکی، قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB است.

$$r^{۲}+h^{۲}=(۲\sqrt{۳})^{۲}\Rightarrow r^{۲}+h^{۲}=۱۲\Rightarrow r^{۲}=۱۲-h^{۲}\quad (۲)$$:رابطهٔ کمکی

گام چهارم: (۲) را در (۱) جای‌گذاری می‌کنیم.

$$V=\pi(۱۲-h^{۲})h=\pi(۱۲h-h^{۳})$$

$$V'(h)=۰\Rightarrow ۱۲\pi-۳\pi h^{۲}=۰\Rightarrow h^{۲}=\frac{۱۲}{۳}=۴\Rightarrow h=۲\xrightarrow{(۲)} r^{۲}=۱۲-۲^{۲}=۸\Rightarrow r=۲\sqrt{۲}$$

گام پنجم: سطح جانبی استوانه را حساب می‌کنیم.

$$S=۲\pi rh=۲\pi\times(۲\sqrt{۲})(۲)=۸\pi\sqrt{۲}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۴ **پاسخ تشریحی** روش اول:

گام اول: ابتدا f را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

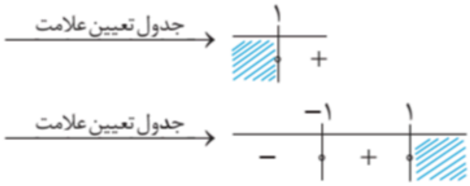
$$f(x)=x^2-2|x-1| \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^2-2x+2 & x\geq 1 \\ x^2+2x-2 & x<1 \end{cases}$$

گام دوم: از f مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-2 & x>1 \\ 2x+2 & x<1 \end{cases}$$

گام سوم: در هر بازه، f' را تعیین علامت می‌کنیم (یک جدول تعیین علامت برای $x>1$ و یک جدول تعیین علامت برای $x<1$ رسم می‌کنیم):

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-2 & x>1 \\ 2x+2 & x<1 \end{cases}$$



بنابراین جدول تعیین علامت f' به صورت زیر می‌شود:

x		-1		1	
f'	−		+		+
f	↘		↗		↗

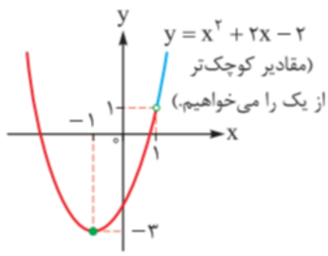
گام چهارم: بنابراین f در بازهٔ $(-1,+\infty)$ اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی) است، پس حداقل مقدار a برابر ۱− می‌شود.

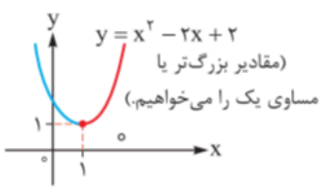
دام تستی اگر جواب را (۱) در نظر گرفته‌اید، خوب دقت کنید! f در $x=1$ پیوسته است، چون $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=1$ اما مشتق‌پذیر نیست، چون $f'_+(1)=0$ و $f'_-(1)=4$ پس f در $x=1$ نقطهٔ گوشه‌ای است، اما همان‌طور که در جدول تعیین علامت f' می‌بینید، f در قبل و بعد از $x=1$ صعودی، یعنی مثلاً به شکل  است، پس f در اطراف $x=1$ هم اکیداً صعودی است و جواب (۳) می‌شود.

روش دوم:

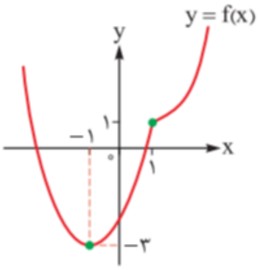
در گام اول روش اول، f را به صورت چندضابطه‌ای نوشتیم.حالا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+2 & x\geq 1 \\ x^2+2x-2 & x<1 \end{cases}$$





بنابراین نمودار f به صورت مقابل می‌شود:

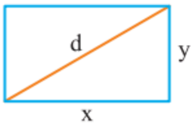


حالا با توجه به نمودار رسم‌شده، واضح است که f در بازهٔ $(-1,+\infty)$، اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی) است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۵ **پاسخ تشریحی**

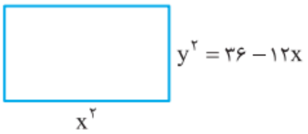
گام اول: مستطیل اولیه را به صورت مقابل در نظر می‌گیریم.



طبق گفتهٔ سؤال، در این مستطیل جمع طول قطر و یک ضلع برابر ۶ است، پس $x+d=۶$، یعنی $d=۶-x$ می‌شود. حالا با استفاده از فیثاغورس داریم:

$$x^۲+y^۲=d^۲ \xrightarrow{d=۶-x} \cancel{x^۲}+y^۲=۳۶-۱۲x+\cancel{x^۲} \Rightarrow y=\sqrt{۳۶-۱۲x}$$

گام دوم: ماکزیمم مساحت مستطیل‌هایی را می‌خواهیم که اضلاع آن، مجذور اضلاع مستطیل اولیه، یعنی به صورت مقابل باشند:



گام سوم: تابع مساحت این مستطیل به صورت مقابل است:

$$S(x)=x^۲y^۲=x^۲(۳۶-۱۲x)=۳۶x^۲-۱۲x^۳$$

گام چهارم: بیشترین مساحت این مستطیل‌ها را می‌خواهیم. از S مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم تا طول نقاط اکسترمم به دست آید:

$$S'(x)=۷۲x-۳۶x^۲=۰ \Rightarrow ۳۶x(۲-x)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ & \text{غ ق ق چون طول ضلع نمی‌تواند صفر باشد.} \\ x=۲ \end{cases}$$

گام پنجم: با جای‌گذاری $x=۲$ در $S(x)$، حداکثر مساحت مستطیل حاصل می‌شود:

$$S(x)=x^۲(۳۶-۱۲x) \Rightarrow S(۲)=۴(۳۶-۲۴)=۴\times۱۲=۴۸$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۶ دلیل نادرستی گزینه ۱: اگر تابع در نقطه $x=c$ مشتق نداشته باشد، می‌تواند اکسترمم نسبی باشد. مثلا نقطه $x=۰$ در تابع $y=-|x|$.

دلیل نادرستی گزینه ۲: اگر $f'(c)=۰$ باشد، لزوماً به معنی این نیست که $x=c$ یک نقطهٔ اکسترمم نسبی نیز می‌باشد. مثلاً در تابع $f(x)=x^۳$، $f'(۰)=۰$ ولی $x=۰$ اکسترمم نسبی نمی‌باشد.

دلیل نادرستی گزینه ۳: توجه کنید که نقاط بحرانی لزوماً اکسترمم نسبی نیستند.

(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۲۷ در نقطه $x=-۲$ مشتق تابع برابر صفر است. پس:

$$f'(-۲)=۰ \Rightarrow f'(x)=-۳x^۲+۲bx \Rightarrow -۳(۴)+۲b(-۲)=۰ \Rightarrow ۴b=-۱۲ \Rightarrow b=-۳$$

از طرفی $f(-۲)=-۵$ است. پس:

$$f(-۲)=-۵ \Rightarrow -(-۲)^۳-۳(-۲)^۲+d=-۵ \Rightarrow ۸-۱۲+d=-۵ \Rightarrow d=-۱ \Rightarrow d-b=-۱-(-۳)=۲$$

(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۲۸ نقاط بحرانی تابع را با حل معادله $f'(x)=۰$ می‌یابیم:

$$f'(x)=۰ \Rightarrow f'(x)=\frac{۸x-۱۶}{۲\sqrt{۴x^۲-۱۶x+۲۵}}=۰ \Rightarrow x=۲$$

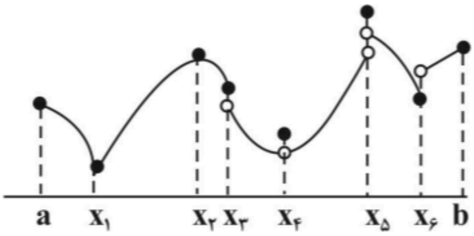
مقدار بحرانی تابع را در $x=۰,۲,۳$ می‌یابیم:

$$\begin{cases} f(۰)=\sqrt{۲۵}=۵ \Rightarrow \max \\ f(۲)=\sqrt{۹}=۳ \Rightarrow \min \\ f(۳)=\sqrt{۱۳} \end{cases}$$

حاصل ضرب مقادیر مینیمم و ماکزیمم مطلق: $۳\times۵=۱۵$

(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

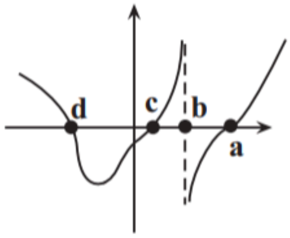
۲۹ با توجه به شکل داده شده نقاط x_1، **min** نسبی و مطلق و x_5 ماکزیمم نسبی مطلق هستند اما نقاط x_4 و x_2 فقط **max** نسبی هستند و **max** مطلق نیستند، نقطه x_6 فقط **min** نسبی است ولی مینیمم مطلق نیست بنابراین سه نقطه x_6 و x_4 و x_2 اکسترمم نسبی هستند ولی اکسترمم مطلق نیستند.



(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۳۰ در نقاط **a** و **c** و **d**، $f'(x)$ برابر صفر می‌باشد و علامت آن نیز عوض می‌شود پس اکسترمم نسبی محسوب می‌شوند.

همچنین در نقطه **b**، از آنجایی که دامنه تابع $f(x)$ اعداد حقیقی می‌باشد و تابع پیوسته است، پس $f(b)$ موجود می‌باشد و در این نقطه نیز اکسترمم نسبی می‌باشد.



(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۳۱ ماکزیمم نسبی $\Leftarrow$ نقطه $(۳,۳)$

ماکزیمم مطلق $\Leftarrow$ نقطه $(۱,۴)$

مینیمم نسبی $\Leftarrow$ نقطه $(۲,۲)$

مینیمم مطلق $\Leftarrow$ نقطه $(۴,۱)$

خواستهٔ سؤال برابر است با $۳+۱+۲+۱=۷$

(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۳۲

$$f'(x)=x^۲+x-۲۰$$

$$f'(x)=۰: x^۲+x-۲۰=۰ \Rightarrow (x-۴)(x+۵)=۰$$

$$\begin{cases} x=+۴ \\ x=-۵ \end{cases} \Rightarrow$$

x		-۵		+۴	
f′	+	○	-	○	+
f	↗		↘		↗
		max		min	

$$|max-min|=|-۵-۴|=|-۹|=۹$$

(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۳۳ ریشه‌های مشتق را می‌یابیم و آن را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x)=۳x^۳(۲x-۴)^۲(x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=-۱ \\ x=۲ \end{cases}$$

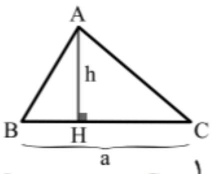
جملهٔ $(۲x-۴)^۲$ همواره مثبت است و در تعیین علامت نقش ندارد. تعیین علامت $۳x^۳(x+۱)$ با تعیین علامت $۳x(x+۱)$ معادل است.

پس تابع یک ماکزیمم نسبی در $x=-۱$ و یک مینیمم نسبی در $x=۰$ دارد.

x	-∞		-۱		۰		۲		+∞
f′(x)		+	○	-	○	+	○	+	
f(x)		↗		↘		↗		↗	

(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۳۴ اگر قاعده را با a و ارتفاع را با h نمایش دهیم، آنگاه $a+h=16$. می‌خواهیم مساحت ماکزیمم گردد، لذا:



$$S=\frac{1}{2}a.h$$

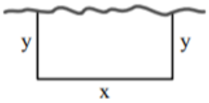
$$h=16-a \Rightarrow S=\frac{1}{2}a(16-a)$$

$$\Rightarrow S(a)=8a-\frac{a^2}{2} \Rightarrow S'(a)=8-\frac{2a}{2}=0 \Rightarrow a=8 \Rightarrow h=8$$

$$\Rightarrow S_{max}=\frac{1}{2}\times 8\times 8=32$$

(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۳۵ با توجه به شکل:



$$2y+x=L$$
$$\Rightarrow x=L-2y$$

که L، برابر طول طناب است. مساحت مستطیل برابر $S=xy$ است، لذا:

$$S=xy \xrightarrow{x=L-2y} S=y(L-2y)$$

$$\Rightarrow S=Ly-2y^2 \Rightarrow S'_y=L-4y=0 \Rightarrow y=\frac{L}{4}$$

بنابراین ماکزیمم مساحت برابر است با:

$$S_{max}=\frac{L}{4}(L-\frac{L}{2})=\frac{L^2}{8}=648$$

$$\Rightarrow L^2=8\times 648 \Rightarrow L^2=8\times 8\times 81 \Rightarrow L=8\times 9=72$$

(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۳۶ برای یافتن بیشترین شیب خط مماس، باید ماکزیمم مقدار تابع مشتق را بیابیم:

$$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-x \rightarrow f'(x)=-x^2+4x-1$$

بیشترین مقدار تابع درجه‌ی دوم $f'(x)$ به ازای $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2(-1)}=2$ به‌دست می‌آید

که شیب خط مماس در این نقطه برابر است با:

$$f'(2)=-2^2+4\times 2-1=3$$

و عرض تابع به ازای $x=2$ برابر است با:

$$f(2)=-\frac{1}{3}\times 2^3+2\times 2^2-2=\frac{10}{3}$$

بنابراین معادله‌ی خط مماس در نقطه‌ی $(2,\frac{10}{3})$ به صورت زیر است:

$$y-\frac{10}{3}=3(x-2)$$

$$\xrightarrow[x=0]{\text{تقاطع با محور } y \text{ ها}} y-\frac{10}{3}=3(0-2)$$

$$\Rightarrow y=-6+\frac{10}{3}=\frac{-8}{3}$$

(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۳۷ با توجه به آزمون مشتق اول می‌دانیم که در توابع پیوسته در نقطه max نسبی، مشتق راست عددی منفی و مشتق چپ عددی مثبت است و در نقطه min نسبی، برعکس این مطلب اتفاق می‌افتد. حال با توجه به این مطلب در تابع f، نقطه $x=-2$ نقطه max نسبی و نقطه $x=-1$ نقطه min نسبی است.

توجه کنید که نقطهٔ min نسبی در تابع $-f(x)$ در نقطه max نسبی تابع f اتفاق می‌افتد، یعنی:

$$2-x=-2 \Rightarrow x=4$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳۸ در نمودار تابع f داریم:

$x = x_1 \rightarrow$ نقطهٔ **min** نسبی و نقطهٔ بحرانی

$x = x_2 \rightarrow$ نقطهٔ **min** نسبی و نقطهٔ بحرانی

$x = x_3 \rightarrow$ نقطهٔ بحرانی

$x = x_4 \rightarrow$ نقطهٔ **min** نسبی و نقطهٔ بحرانی

$x = x_5 \rightarrow$ نقطهٔ **min** نسبی و نقطهٔ بحرانی

$x = x_6 \rightarrow$ نقطهٔ بحرانی

$x = x_7 \rightarrow$ نقطهٔ بحرانی

$x = x_8 \rightarrow$ نقطهٔ بحرانی

بنابراین ۸ نقطهٔ بحرانی و ۴ نقطهٔ **min** نسبی داریم و تعداد نقاط بحرانی دو برابر تعداد نقاط **min** نسبی می‌باشد.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳۹ ابتدا طول نقاط بحرانی تابع f را در بازهٔ $[0,3]$ پیدا می‌کنیم:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \xrightarrow{x \in [0,3]} x = 1$$

$$f(0) = k - 6 \quad , \quad f(1) = k - 8 \quad , \quad f(3) = 12 + k$$

$$\begin{array}{l} y_{min} = k - 8 \\ y_{max} = k + 12 \end{array} \Rightarrow y_{min} + y_{max} = 0 \Rightarrow 2k + 4 = 0 \Rightarrow k = -2$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۴۰ **گام اول:** ابتدا مشتق تابع f و صفرهای آن را مشخص می‌کنیم:

$$f'(x) = -6x^2 + 6 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

گام دوم: حال جدول تغییرات رفتار تابع f را می‌نویسیم:

	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
f'	$-$	۰	$+$	۰	$-$
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

گام سوم: با توجه به جدول، بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع f روی آن اکیداً صعودی است، برابر $(-1,1)$ است و در نتیجه:

$$a = -1 \,,\, b = 1 \Rightarrow b - a = 1 - (-1) = 2$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۴۱ **گام اول:** ضابطهٔ تابع f را به صورت ضابطهٔ یک تابع قطعه‌ای بازنویسی می‌کنیم و مشتق آن را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - x^2}{x^2 + 4} & ; \quad x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{1 + x^2}{x^2 + 4} & ; \quad x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-10x}{(x^2 + 4)^2} & ; \quad x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{6x}{(x^2 + 4)^2} & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

گام دوم: با توجه به ضابطهٔ مشتق تابع f، فقط در $x = 0$ مقدار f' برابر صفر است و در سایر نقاط عضو دامنه، f' وجود دارد.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۴۲ چون ضریب $x^۲$ منفی است برای $\Delta \leq ۰$ تابع به صورت تهی یا یک نقطه‌است و سه تا بحرانی ندارد. پس فقط $\Delta > ۰$ را کنترل می‌کنیم:

پس داریم: $-x^۲+۳x+b : \Delta = ۹+۴b > ۰ \Rightarrow b > -\frac{۹}{۴} \xrightarrow{b\in\mathbb{Z}} b_{min} = -۲$

$$f(x)=\sqrt{-x^۲+۳x-۲}$$

$$f'(x)=\frac{-۲x+۳}{۲\sqrt{-x^۲+۳x-۲}}$$

ریشهٔ صورت f'، $\frac{۳}{۲}$ و ابتدا و انتهای دامنه ۱ و ۲ هستند و داریم:

$$f(۱)=f(۲)=۰ \qquad \max(f)=f(\frac{۳}{۲})=\sqrt{-\frac{۹}{۴}+\frac{۹}{۲}-۲}=\frac{۱}{۲}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۴۳

$$\begin{cases} f'(-۲)=۰ \Rightarrow ۳x^۲+۲ax+b=f'(x) \Rightarrow ۱۲-۴a+b=۰ \\ f(-۲)=۲۹ \Rightarrow -۸+۴a+۱-۲b=۲۹ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۴a+b=-۱۲ \\ ۴a-۲b=۳۶ \end{cases} \Rightarrow -b=۲۴ \Rightarrow b=-۲۴, a=-۳ \quad \Rightarrow a+b=-۲۷$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۴۴ اگر بخواهد $x=۰$ یک نقطه اکسترمم نسبی باشد باید علامت تابع در هر دو طرف $x=۰$ یکسان باشد.

جدول تعیین علامت هر یک از گزینه‌ها را در همسایگی $x=۰$ تشکیل می‌دهیم.

پس در تابع $y=xf(x)$، مبدأ مختصات یک نقطه ماکزیمم نسبی است.

x		۰	
$xf(x)$	$-$		$-$
$\|x\|f(x)$	$+$		$-$
$xf(\|x\|)$	$+$		$-$
$x\|f(x)\|$	$-$		$+$

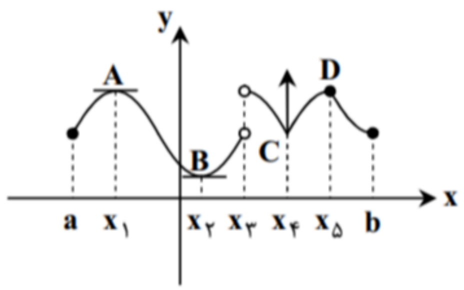
(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۴۵ $x=a$ و $x=b$ طول نقاط ابتدا و انتهای دامنه هستند، پس نقاط بحرانی تابع هستند. $f'(x_۱)$ و $f'(x_۲)$ برابر صفر است. پس A و B نقاط بحرانی هستند.

تابع در $x_۴$ مماس قائم دارد، پس نقطهٔ C نقطهٔ بحرانی است.

تابع در نقطهٔ D با طول $x_۵$، نقطهٔ گوشه‌ای است. پس این نقطه نیز نقطهٔ بحرانی است. بنابراین تابع ۶ نقطهٔ بحرانی دارد.

دقت کنید $x_۳$ عضو دامنهٔ تابع نیست، پس نقطه‌ای با طول $x_۳$، نقطهٔ بحرانی نیست.



(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۴۶ ابتدا داریم:

$$۵-x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \leq ۵ \Rightarrow x \in [-\sqrt{۵}, \sqrt{۵}]$$

پس تابع f در $x=\pm\sqrt{۵}$ مشتق‌پذیر نیست. از طرفی $x=۲$ طول نقطهٔ بحرانی است، پس $f'(۲)=۰$. حال داریم:

$$f(x)=ax+\sqrt{۵-x^۲} \Rightarrow f'(x)=a+\frac{-۲x}{۲\sqrt{۵-x^۲}}=a-\frac{x}{\sqrt{۵-x^۲}} \xrightarrow{f'(۲)=۰} a-\frac{۲}{\sqrt{۵-۴}}=۰ \Rightarrow a-۲=۰ \Rightarrow a=۲$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۴۷ ابتدا نقاط بحرانی تابع f را در بازهٔ $[۴,۹]$ محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=۰ \Rightarrow \frac{۱}{۹}-\frac{۴}{x^۲}=۰ \Rightarrow \frac{۴}{x^۲}=\frac{۱}{۹} \Rightarrow x^۲=۳۶ \Rightarrow x=\pm ۶$$

توجه کنید که $x=-۶$ در بازهٔ $[۴,۹]$ قرار ندارد. اکنون به محاسبهٔ مقدار تابع در سه نقطه با طول‌های $x=۴$، $x=۶$ و $x=۹$ می‌پردازیم:

$$f(۴)=\frac{۴}{۹}+\frac{۴}{۴}=\frac{۴}{۹}+۱=\frac{۱۳}{۹} \qquad f(۶)=\frac{۶}{۹}+\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}+\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۳} \qquad f(۹)=\frac{۹}{۹}+\frac{۴}{۹}=۱+\frac{۴}{۹}=\frac{۱۳}{۹}$$

بین سه عدد به‌دست‌آمده، $\frac{۴}{۳}$ کمترین مقدار است، پس مینیمم مطلق تابع برابر $\frac{۴}{۳}$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۴۸

$$D=[-\frac{۳}{۲},+\infty) \ , \ f(-\frac{۳}{۲})=-\frac{۳}{۲}$$

$$f'(x)=۱-\frac{۴}{\sqrt{۲x+۳}}=۰ \Rightarrow \sqrt{۲x+۳}=۴ \Rightarrow ۲x+۳=۱۶ \Rightarrow x=\frac{۱۳}{۲} \Rightarrow \alpha=\frac{۱۳}{۲}$$

$$f(\frac{۱۳}{۲})=\frac{۱۳}{۲}-۴\sqrt{۱۶}=\frac{۱۳}{۲}-۱۶=\frac{۱۳-۳۲}{۲}=\frac{-۱۹}{۲}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)